

PRIMITIFITAS DARI SEBUAH DIGRAPH

Muhammad Fathoni

Manajemen Informatika, Politeknik Unggul LP3M

email: mhd.fathoni@gmail.com**Abstract**

Tulisan ini membahas tentang primitifitas sebuah digraph. Digraph D dikatakan terhubung kuat apabila untuk dua buah verteks u dan v di D terdapat jalan dari u ke v dan dari v ke u . Sebuah digraph yang terhubung kuat dikatakan primitif apabila terdapat bilangan bulat positif k sehingga untuk setiap pasangan verteks (u, v) terdapat jalan dari u ke v dengan panjang k . Matriks ketetanggaan A dari digraph D adalah matriks primitif jika $A^m > 0$, untuk suatu bilangan bulat positif m .

Keywords: Digraph, Matriks ketetanggaan, Primitif

1. Pendahuluan

Sebuah graph G adalah sebuah objek yang terdiri atas sekumpulan titik yang disebut verteks dan garis yang menghubungkan dua buah verteks yang disebut sisi atau edge. Pada graph G terdapat pengulangan setiap pasangan verteks (u, v) dan (v, u) yang dapat ditulis dengan (u, v) . Sebuah graph dikatakan terhubung apabila terdapat bilangan bulat positif k , sehingga untuk pasangan verteks u dan v terdapat jalan dengan panjang k dari verteks u ke v dan dari v ke u . Bo, Z.(2003:28) : sebuah graph G adalah primitif jika dan hanya jika G terhubung dan G memuat sedikitnya satu *cycle* ganjil, dimana *cycle* ganjil adalah *cycle* dengan panjang ganjil.

Andaikan G adalah sebuah graph atas n verteks v_1, v_2, \dots, v_n . Sebuah matriks ketetanggaan dari graph G adalah sebuah matriks $(1,0)$ dari matriks bujursangkar A yang berordo n dimana entri a_{ij} dari matriks A adalah 1 jika terdapat sisi yang menghubungkan i dengan j dan 0 jika tidak terdapat sisi yang menghubungkan i dengan j . Matriks A adalah primitif jika setiap entri dari A^m adalah positif, untuk suatu bilangan bulat positif m .

Konsep dari graph primitif digunakan dalam berbagai hal, diantaranya pada jaringan Google dan Automata. Penerapan graph pada Google yaitu keterhubungan antara suatu web dengan kata kunci yang dimasukkan. Dengan kata kunci yang dimasukkan, maka Google akan mencari kata-kata pada web-web yang ada yang berkaitan dengan kata kunci tersebut. Kata-kata kunci dan web yang berkaitan membentuk sebuah graph. Page dan Brin (Langville dan Meyer (2006)) mengungkapkan bahwa graph Google harus primitif karena bila tidak primitif maka pencarian tidak akan berhasil. Selanjutnya Page dan Brin (Langville dan Meyer (2006)) menambahkan graph Google harus berupa matriks bujursangkar S dengan $S^m > 0$, dan $m > 0$. Dari pendapat Page dan Brin (Langville dan Meyer (2006)), graph Google adalah primitif karena semua entri dari S^m adalah positif. Penggunaan graph primitif berikutnya yaitu pada Automata. Penggunaan graph primitif pada automata yaitu tentang sinkronisasi automata. Culik, Karhumaki dan Kari, J. (2002:2295) : setiap Automata yang primitif adalah sinkron dan jika imprimitif maka automata tidak sinkron.

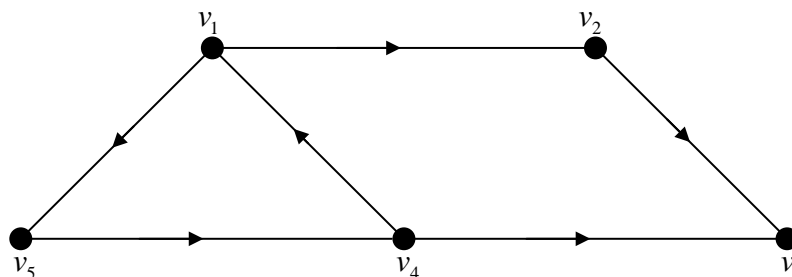
Digraph atau graph berarah merupakan bagian dari teori graph. Seperti halnya graph, sebuah digraph D adalah sebuah objek yang terdiri atas sekumpulan titik yang disebut sebagai busur atau *arc*. Suatu digraph D dikatakan terhubung kuat apabila untuk setiap pasangan verteks u dan verteks v atau (u, v) di D terdapat jalan dari verteks u ke verteks v dan dari verteks v ke verteks u . Brualdi R.A. dan Ryser H.J. (1991) : sebuah digraph D dikatakan primitif jika dan hanya jika D terhubung kuat dan pembagi persekutuan terbesar dari panjang *cycle-cycle* di D adalah 1. Brualdi R.A. dan Ryser H.J. (1991) : suatu digraph D adalah primitif jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga untuk setiap pasangan verteks (u, v) di D terdapat jalan dengan panjang k .

Digraph

Digraph atau graph berarah adalah sekumpulan titik-titik atau verteks yang dihubungkan oleh busur berarah atau *arc*. Hal yang membedakan digraph dengan graph adalah busurnya, kalau pada graph hanya berupa sisi.

Representasi dari sebuah digraph D dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 1. Representasi dari digraph dengan 5 buah verteks.

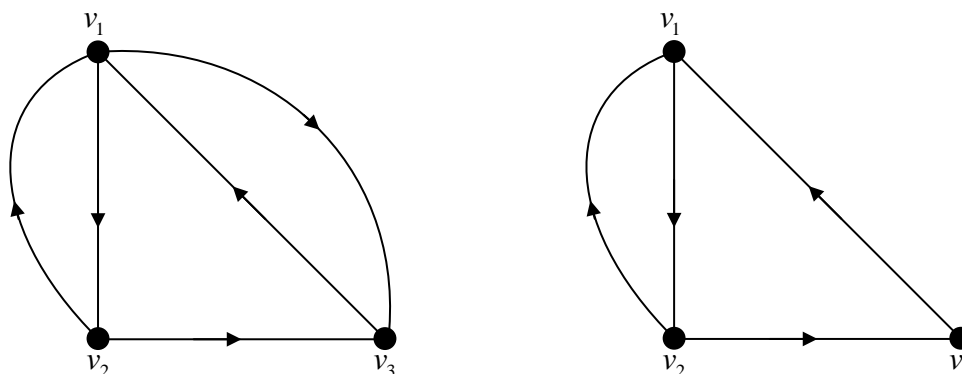


Gambar 1. Representasi digraph

Dari Gambar 1 terdapat himpunan V yakni $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan terdapat himpunan busur E yakni $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 4)\}$.

Primitifitas

Sebuah digraph dikatakan terhubung kuat (*strongly connected*) bila untuk setiap pasangan verteks (u, v) di D terdapat jalan dari verteks u ke v dan dari v ke u . Sebaliknya, sebuah digraph dikatakan tidak terhubung kuat bila untuk beberapa pasangan verteks (u, v) di D tidak terdapat jalan dari u ke v atau dari v ke u . Untuk lebih memahami digraph terhubung kuat dan tidak terhubung kuat dapat dilihat pada Gambar 2. Gambar 2(a) memperlihatkan sebuah digraph yang terhubung kuat karena untuk setiap verteks u dan v di D , terdapat jalan dari u ke v dan dari v ke u . Misalnya jalan dari verteks 2 ke verteks 1 yaitu $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, lalu jalan dari verteks 1 ke verteks 2 yaitu $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, begitu pula untuk pasangan verteks yang lain. Gambar 2(b) memperlihatkan sebuah digraph yang tidak terhubung kuat. Pada digraph ini, cukup dengan melihat adanya jalan dari verteks 1 ke verteks 3 yaitu $1 \rightarrow 3$, namun tidak terdapat jalan dari verteks 3 ke verteks 1, sehingga merupakan digraph yang tidak terhubung kuat.



Gambar 2. (a) Digraph terhubung kuat, dan (b) digraph tak terhubung kuat

Matriks Ketetangaan

Andaikan D adalah sebuah digraph atas n verteks $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sebuah matriks ketetangaan $A = (a_{ij})$ dari D adalah sebuah matriks bujursangkar berordo n yang didefinisikan sebagai berikut.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika terdapat busur berarah dari verteks } i \text{ ke verteks } j \\ 0, & \text{jika sebaliknya} \end{cases}$$

dimana $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Berikut ini diberikan contoh matriks ketetangaan dari sebuah digraph.

Contoh 2 Dari Gambar 2(a) dan 2(b), matriks ketetanggaannya masing-masing adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sebuah matriks ketetangaan A dari sebuah digraph D dikatakan primitif, jika terdapat bilangan bulat positif k sehingga seluruh entri dari A^k adalah positif. Hal ini sesuai dengan pendapat Wielandt (Schneider, H. (2003)) yaitu sebuah matriks tak negatif A dikatakan primitif jika $A^k > 0$. Pada Contoh 2.3, matriks ketetangaan A adalah matriks ketetangaan dari digraph primitif, hal ini dapat dilihat bahwa

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengambil bilangan bulat positif k yang lebih dari 1 diperoleh

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk nilai $k > 5$, $A^k > 0$. Sehingga disimpulkan seluruh entri pada A^k dengan $k \geq 4$ adalah positif.

Matriks B adalah matriks dari digraph yang tak terhubung kuat sehingga tidak primitif. Andaikan B adalah primitif maka untuk bilangan bulat positif k , $B^k > 0$. Bila primitif, maka untuk nilai k yang besar, seluruh entri B^k adalah positif. Diambil $k = 30$ sehingga diperoleh

$$B^{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk bilangan bulat positif $k > 30$, entri dari B^k hanya berada pada interval $[0,1]$. Karena masih terdapat entri yang bernilai 0, mengakibatkan digraph D dengan matriks ketetanggaan B tidak primitif.

II. Metodologi Penelitian

Untuk mencari keprimitifan suatu matriks ketetanggaan dalam ukuran besar akan lebih mudah jika dilakukan dengan menggunakan alat bantu berupa komputer. Oleh karena itu untuk menyelesaikan permasalahan secara komputerisasi maka akan dirancang algoritma untuk mencari Primitifitas Digraph dan menerapkan algoritma yang didapat dalam program (MATLAB).

III. Komputasi Primitifitas Digraph

Komputasi dalam persoalan primitifitas digraph diawali dengan matriks ketetanggaan A dari digraph D . Pada Bagian Matriks Ketetanggaan, telah dijelaskan bahwa matriks ketetanggaan A dari digraph D adalah primitif jika seluruh entri $A^m > 0$ untuk suatu bilangan bulat positif m . Bila matriks ketetanggaan A adalah matriks primitif mengakibatkan digraph D juga primitif. Dalam hal ini, penulis melakukan komputasi dengan menggunakan software MATLAB berdasarkan Algoritma 1.

Algoritma 1. Primitifitas Digraph

```

input  : matriks ketetanggaan A dari digraph D
output : primitifitas dari digraph D
begin
  for i ← 1 to k do
    I ← I * A {I merupakan matriks identitas}
    if I > 0
      write(Primitif)
    else
      write(Imprimitif)
  end;

```

Dengan menerapkan algoritma 1 pada pemrograman MATLAB, digraph pada Contoh 2(a) dan 2(b) dapat ditentukan apakah kedua digraph primitif atau tidak, seperti yang terlihat pada Gambar 3 berikut.

```

>> A=[0 1 1; 1 0 1; 1 0 0]

A =

     0     1     1
     1     0     1
     1     0     0

>> primitif(A)

      |-----|
      | Digraph Primitif |
      |-----|

>>
>>
>> B=[0 1 1; 1 0 1; 0 0 0]

B =

     0     1     1
     1     0     1
     0     0     0

>> primitif(B)

      |-----|
      | Digraph Imprimitif |
      |-----|

>>

```

Gambar 3. Komputasi Primitifitas Digraph

IV. Kesimpulan

Sebuah digraph D dikatakan primitif jika:

1. Digraph D terhubung kuat.
2. Pembagi persekutuan terbesar dari panjang *cycle-cycle* di D adalah 1.

Sebuah matriks ketetanggaan A dari digraph D adalah matriks primitif bilamana seluruh entri $A^m > 0$ untuk suatu bilangan bulat positif m . Hal ini berakibat, digraph D adalah primitif jika matriks ketetanggaannya merupakan matriks primitif.

Daftar Pustaka

- Bo, Z. (2003). Exponents of primitive graphs. *Australasian Journal Of Combinatorics.*, 28, 67 – 72.
- Langville, A.N. dan Meyer, C.D. (2006). *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press, Princeton.
- Culik II, K., Karhumaki, J., dan Kari, J. (2002). A note on synchronized automata and road coloring problem. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. W. Kuich, G. Rozenberg, dan A. Salomaa (Eds.) DLT 2001, LNCS 2295, 175 – 185.
- Brualdi R.A. dan Ryser H.J. (1991). *Combinatorial Matrix Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Schneider, H. (2003). Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices. *Linear Algebra Appl.*, 353, 5 – 10.